## 補　微分方程式

### 基本問題 & 解法のポイント

**60**

$\dfrac{dy}{dx}=(2y-3)x$ の解

(i) $2y-3=0$ すなわち $y=\dfrac{3}{2}$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=0$ より，$y=\dfrac{3}{2}$ は微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(2y-3)x$ の解である。

(ii) $2y-3=0$ すなわち $y\neq\dfrac{3}{2}$ のとき

$\dfrac{dy}{2y-3}=xdx$ より，$\displaystyle\int\frac{dy}{2y-3}=\int xdx$

よって，$\log|2y-3|=x^2+C$ （$C$ は積分定数）

これより，$2y-3=\pm e^{x^2+C}=\pm e^C e^{x^2}$

ここで，$A=\pm e^C$ とおくと，$y=\dfrac{1}{2}\left(Ae^{x^2}+3\right)$ （$A$ は 0 でない任意の定数）

$y=\dfrac{1}{2}\left(Ae^{x^2}+3\right)$ に $A=0$ を代入すると，$y=\dfrac{3}{2}$ となり，これも解だから，

(i)と(ii)をまとめて，$y=\dfrac{1}{2}\left(Ae^{x^2}+3\right)$ （$A$ は任意の定数）

$x=0$ のとき $y=1$ となるもの

$y=\dfrac{1}{2}\left(Ae^{x^2}+3\right)$ に $x=0,\ y=1$ を代入すると，$1=\dfrac{1}{2}(A+3)$ より，$A=-1$

よって，$y=\dfrac{1}{2}\left(-e^{x^2}+3\right)$

**61**

曲線 $y=f(x)$ の各点 $(x_0,\ f(x_0))$ における接線の方程式は $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

これが点 $\left(x_0{}^2+\frac{3}{2}x_0,\ 0\right)$ を通るから，$0=f'(x_0)\left\{\left(x_0{}^2+\frac{3}{2}x_0\right)-x_0\right\}+f(x_0)$

すなわち $0=f'(x_0)\left(x_0{}^2+\frac{1}{2}x_0\right)+f(x_0)$

ここで，曲線 $y=f(x)$ の定義より，$x_0$ は任意の正の実数だから，これを $x$ とおくと，

$0=f'(x)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+f(x)$

これと，$x^2+\frac{1}{2}x\neq 0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=-\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}x}\\&=-\frac{2}{2x^2+x}\\&=-\frac{2}{x(2x+1)}\\&=\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{x}\end{aligned}$$

これより，$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{x}\right)dx$

したがって，積分定数を $C$ とおくと，

$$\begin{aligned}\log|f(x)|&=2\log|2x+1|-2\log|x|+C\\&=\log\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2+\log e^C\\&=\log e^C\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2\end{aligned}$$

$\therefore f(x)=\pm e^C\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2$

さらに，$f(1)=9$ より，$9=\pm e^C\cdot 3^2$　$\therefore \pm e^C=1$

以上より，$f(x)=\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2$

補足：微分方程式の別解

$0=f'(x)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)+f(x)$ より，$f(x)=-f'(x)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)$

$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ より，$f(x)=-\frac{df(x)}{dx}\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)$

これより，

$$\frac{df(x)}{f(x)}=-\frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}x}=\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$\therefore \int\frac{1}{f(x)}df(x)=\int\left(\frac{4}{2x+1}-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \log|f(x)|&=2\log|2x+1|-2\log|x|+C\\&=\log\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2+\log e^C\\&=\log e^C\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2\end{aligned}$$

**A**

**213**

**(1)**

$\left(y+\frac{dy}{dx}\right)\sin x=y\cos x$ より，$y(\cos x-\sin x)=\frac{dy}{dx}\sin x$

$y=0$ のとき

$y(\cos x-\sin x)=\frac{dy}{dx}\sin x$ が成り立つから，$y=0$ は微分方程式の解である。

$y\neq 0$ のとき

$\frac{1}{y}dy=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}dx$ より，$\int\frac{1}{y}dy=\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}-1\right)dx$

$$\begin{aligned}\therefore \log|y|&=\log|\sin x|-x+C\\&=\log|\sin x|+\log e^{-x}+\log e^C\\&=\log\left\{e^Ce^{-x}|\sin x|\right\}\end{aligned}$$

$\therefore y=\pm e^Ce^{-x}\sin x$

ここで，$\pm e^C=A$ とおくと，$y=Ae^{-x}\sin x$ （$A$ は 0 でない任意の定数）

$A=0$ を代入すると，$y=0$ となるから，$A=0$ の場合も成り立つ。

よって，$y=Ae^{-x}\sin x$ （$A$ は任意の定数）

**(2)**

$0 \le x \le \pi$ において $y = e^{-x}\sin x$ と $x$ 軸とによって囲まれる図形の面積を求めると，

$e^{-x}\sin x \ge 0$ より，

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = \left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx$$

$$= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$$

$$= e^{-\pi} - 1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} - 1\right)$$

よって，$f(x) = \pm 2e^{-x}\sin x$

補足

$\left(e^{-x}\sin x\right)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$　・・・①

$\left(e^{-x}\cos x\right)' = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$　・・・②

①＋②より，$\left(e^{-x}\sin x\right)' + \left(e^{-x}\cos x\right)' = -2e^{-x}\sin x$　$\therefore e^{-x}\sin x = -\frac{1}{2}\left\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\right\}'$

よって，$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} - 1\right)$

**214**

**(1)**

$y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ $(t > 0)$ での接線の方程式は $y = f'(t)(x - t) + f(t)$

よって，点 $\mathrm{P}(x,\ y) = (x,\ f(x))$ での接線が $y$ 軸と交わる点 Q の座標は $(0,\ -xf'(x) + f(x))$

これより，△OPQ の面積は $\frac{1}{2}x\left|-xf'(x) + f(x)\right|$ であり，これが $\frac{1}{2}x^3$ と等しいから，

$\frac{1}{2}x\left|-xf'(x) + f(x)\right| = \frac{1}{2}x^3$　すなわち　$\frac{\left|xf'(x) - f(x)\right|}{x^2} = 1$　$(\because x > 0)$

よって，$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \begin{cases} 1 & (xf'(x) - f(x) \ge 0) \\ -1 & (xf'(x) - f(x) < 0) \end{cases}$

これと，$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ より，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} 1 & (xy' - y \ge 0) \\ -1 & (xy' - y < 0) \end{cases}$$

よって，$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)$ は一定である。

**(2)**

(1)より，$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\pm 1$すなわち$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\pm 1$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=1$のとき

$$\int d\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\int dx$$

積分定数を$C_1$とおくと，$\dfrac{f(x)}{x}=x+C_1$より，$f(x)=x^2+C_1x$

よって，$f(1)=1$および$f(1)=1+C_1$より，$C_1=0$

ゆえに，$f(x)=x^2$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=-1$のとき

$$\int d\left(\frac{f(x)}{x}\right)=-\int dx$$

積分定数を$C_2$とおくと，$\dfrac{f(x)}{x}=-x+C_2$より，$f(x)=-x^2+C_2x$

これと，$f(1)=1$および$f(1)=-1+C_2$より，$C_2=2$

ゆえに，$f(x)=-x^2+2x$

**215**

与えられた変数は$h$と$t$である。また，$V$は$h$の関数として表せる。

よって，$\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$を$\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\sqrt{h}$と変形し，これを解く。

時刻$t$における水の高さは$h$で，このときの水面の半径を$r$とすると，

時刻$t$までに排出された水の総量は$V=\dfrac{\pi R^2H}{3}-\dfrac{\pi r^2h}{3}$

また，容器と水が入った部分の相似比$\dfrac{r}{R}=\dfrac{h}{H}$より，$r=\dfrac{Rh}{H}$

よって，$V=\dfrac{\pi R^2H}{3}-\dfrac{\pi\left(\dfrac{Rh}{H}\right)^2h}{3}=\dfrac{\pi R^2}{3}\left(H-\dfrac{h^3}{H^2}\right)$

これより，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{d\left\{\dfrac{\pi R^2}{3}\left(H-\dfrac{h^3}{H^2}\right)\right\}}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{\pi R^2}{H^2}h^2\cdot\dfrac{dh}{dt}$

よって，$\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$より，$-\dfrac{\pi R^2}{H^2}h^2\cdot\dfrac{dh}{dt}=\sqrt{h}$　$\therefore h^{\frac{3}{2}}dh=-\dfrac{H^2}{\pi R^2}dt$

したがって，$\int h^{\frac{3}{2}}dh=-\int\frac{H^2}{\pi R^2}dt$

この積分定数を$C$とおくと，$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}=-\frac{H^2}{\pi R^2}t+C$

ここで，$t=0$のとき$h=H$より，$\frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}=C$

よって，$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}=-\frac{H^2}{\pi R^2}t+\frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$

すべての水を排出したときの時刻を$T$とすると，このとき$h=0$

よって，$0=-\frac{H^2}{\pi R^2}T+\frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$より，$T=\frac{2}{5}\pi R^2\sqrt{H}$

**B**

**216**

**(1)**

$$f(x)=1+\int_0^x(x-t)f(t)dt$$
$$=1+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

より，

$$f'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(t)dt$$

よって，$f''(x)=f(x)$

ゆえに，

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}$$
$$=\frac{f'(x)+f(x)}{f(x)+f'(x)}$$
$$=1$$

**(2)**

$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}=1$より，$\frac{1}{\phi(x)}\cdot\frac{d\phi(x)}{dx}=1$　$\therefore\int\frac{1}{\phi(x)}d\phi(x)=\int dx$

したがって，積分定数を$C$とおくと，$\log|\phi(x)|=x+C$より，$\phi(x)=\pm e^Ce^x$

$\phi(0)=f(0)+f'(0)=1+\int_0^0(0-t)f(t)dt+\int_0^0 f(t)dt=1$および$\phi(0)=\pm e^C$より，$\pm e^C=1$

よって，$f(x)+f'(x)=\phi'(x)=e^x$

これより，$\left(e^x f(x)\right)' = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x\left(f(x) + f'(x)\right) = e^{2x}$

よって，積分定数を $D$ とすると，$e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + D$

ここで，$f(0) = 1 + \int_0^0 (0-t)f(t)dt = 1$ および $e^0 f(0) = \frac{1}{2}e^0 + D$ より，$D = \frac{1}{2}$

ゆえに，$e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$ より，$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

**217**

**(1)**

$$\begin{aligned} f(0) &= \left(e^0 + e^0\right)\cos 0 - 2\cdot 0 - \int_0^0 (0-t)f'(t)dt \\ &= (1+1)\cdot 1 - 0 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$f(x) = \left(e^{-x} + e^x\right)\cos x - 2x - x\int_0^x f'(t)dt + \int_0^x tf'(t)dt$ より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-e^{-x} + e^x\right)\cos x - \left(e^{-x} + e^x\right)\sin x - 2 - \int_0^x f'(t)dt - xf'(x) + xf'(x) \\ &= \left(e^x - e^{-x}\right)\cos x - \left(e^x + e^{-x}\right)\sin x - 2 - \int_0^x f'(t)dt \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} f'(0) &= \left(e^0 - e^0\right)\cos 0 - \left(e^0 + e^0\right)\sin 0 - 2 - \int_0^0 f'(t)dt \\ &= (1-1)\cdot 1 - (1+1)\cdot 0 - 2 - 0 \\ &= -2 \end{aligned}$$

**(2)**

$g'(x) = e^x\left(f(x) + f'(x)\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(e^{-x} + e^x\right)\cos x - 2x - x\int_0^x f'(t)dt + \int_0^x tf'(t)dt \\ &= \left(e^{-x} + e^x\right)\cos x - 2x - x\left(f(x) - f(0)\right) + \left[tf(t)\right]_0^x - \int_0^x f(t)dt \\ &= \left(e^{-x} + e^x\right)\cos x - 2x - xf(x) + 2x + xf(x) - \int_0^x f(t)dt \quad (\because f(0) = 2) \\ &= \left(e^{-x} + e^x\right)\cos x - \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

より，$f'(x) = \left(-e^{-x} + e^x\right)\cos x - \left(e^{-x} + e^x\right)\sin x - f(x)$

よって，$f(x) + f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) - e^{-x}(\cos x + \sin x)$

ゆえに，$g'(x) = e^{2x}(\cos x - \sin x) - \cos x - \sin x$

**(3)**

$$\int g'(x)dx=\int\left\{e^{2x}(\cos x-\sin x)-\cos x-\sin x\right\}dx$$
$$=\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx-\sin x+\cos c$$

ここで,

$$\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx=\frac{1}{2}e^{2x}(\cos x-\sin x)-\frac{1}{2}\int e^{2x}(-\sin x-\cos x)dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}(\cos x-\sin x)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{2x}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx\right\}$$
$$=\frac{1}{4}e^{2x}(3\cos x-\sin x)-\frac{1}{4}\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx$$

より, $\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx=\frac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)+C_1$ （$C_1$ は積分定数）

よって,

$g(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)-\sin x+\cos x+C$ （$C$ は積分定数）

すなわち $e^x f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)-\sin x+\cos x+C$

また, $e^0 f(0)=\frac{1}{5}e^0(3\cos 0-\sin 0)-\sin 0+\cos 0+C$, $f(0)=2$ より,

$2=\frac{8}{5}+C \quad \therefore C=\frac{2}{5}$

ゆえに, $f(x)=\frac{1}{5}e^x(3\cos x-\sin x)+e^{-x}\left(\cos x-\sin x+\frac{2}{5}\right)$

補足 $\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx$ の別解

$$\left(e^{2x}\cos x\right)'=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x$$

$$\left(e^{2x}\sin x\right)'=e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x$$

より,

$$2\left(e^{2x}\cos x\right)'+\left(e^{2x}\sin x\right)'=5e^{2x}\cos x \quad \therefore e^{2x}\cos x=\frac{1}{5}\left\{e^{2x}(2\cos x+\sin x)\right\}'$$

$$\left(e^{2x}\cos x\right)'-2\left(e^{2x}\sin x\right)'=-5e^{2x}\sin x \quad \therefore e^{2x}\sin x=\frac{1}{5}\left\{e^{2x}(-\cos x+2\sin x)\right\}'$$

よって, $\int e^{2x}(\cos x-\sin x)dx=\frac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)+C_1$